ツイスター空間の幾何学

本多 宣博 (東京工業大学)

概要

第一節では反自己双対構造およびそれに付随するツイスター空間に関する基本的な内容を紹介する。第二節ではこれらに関して、2000 年頃までの主要な結果を紹介する。第三節では特に Moishezon ツイスター空間に関してその後得られたいくつかの結果を紹介する。本稿は 2015 年度日本数学会年会における企画特別講演の要旨（アブストラクト集からの転載）である。

1 反自己双対計量とツイスター空間

よく知られているように、向きづけられた曲面上で共形構造を考えることと複素構造を考えることは同値である。4 次元の場合は 2 次元のときとは違って向きと共形構造から複素構造は接空間のレベルでさえ一意には定まらない。すなわち、T を正定値内積と向きの入った 4 次元実ベクトル空間とすると、簡単な考察により、集合

$$\{J \in O(T)\,;\, J^2 = -1 \text{ で } J \text{ の定める複素向きは与えられた向きと一致}\} \tag{1.1}$$

は自然に 2 次元球面と同一視できることがわかる。2 次元のときと同じ理由で (1.1) は $\mathrm{End}\,(T)$ の部分集合として共形類にしかよらない。したがって、向きづけられた 4 次元共形多様体 $(M, [g])$ に対して、球面 (1.1) をファイバーとするファイバー束

$$\pi : Z \to M$$

が得られる。Z は M の接バンドルの自己準同型束 $\mathrm{End}\,(TM)$ の部分束である。Z は次のように自然な概複素構造を持つ：まず共形類 $[g]$ を代表するリーマン計量を任意に選ぶと、その Levi-Civita 接続により、任意の点 $z \in Z$ に対して接空間の分解

$$T_zZ = H_z \oplus V_z$$

が定まる。ただし H_z は水平部分空間、V_z は垂直部分空間である。Z の定義から各点 $z \in Z$ は接空間 $T_{\pi(z)}M$ の複素構造を定めるので、射影 π を通じて H_z に複素構造が定まる。また垂直部分空間 V_z には 2 次元球面上の標準的な複素構造を入れる。これらの直

和により、Z 上には概複素構造が入る。この概複素構造の積分可能性は、元の共形構造 $[g]$ の微分幾何的な性質で決まる：

定理 1.1 (Penrose, Atiyah-Hitchin-Singer [1]) Z 上の上記の概複素構造が積分可能であることと共形構造 $[g]$ が反自己双対的であることは同値である。 □

ここで反自己双対的な共形構造[*1]とは、平坦な共形構造を、4 次元での特殊事情を使って次のように弱めて得られる概念である。まず向きづけられた 4 次元多様体上で、共形構造は 2 形式の空間 $\wedge^2$ を自己双対成分と反自己双対成分に分解する：

$$\wedge^2 = \wedge^+ \oplus \wedge^- \tag{1.2}$$

ここで $\wedge^+$ および $\wedge^-$ はそれぞれ自己双対的および反自己双対的な 2 形式のなす部分束である。すなわち

$$\wedge^+ = \{\phi \in \wedge^2\,;\, *\phi = \phi\}, \quad \wedge^- = \{\phi \in \wedge^2\,;\, *\phi = -\phi\},$$

ただし $* : \wedge^2 \to \wedge^2$ はホッジの $*$ 作用素（これは共形構造と向きのみから定まる）である。ベクトル束 $\wedge^2$ を、構造群 $\mathrm{SO}(4)$ に付随する随伴束とみなせば、分解 (1.2) はよく知られたリー環の分解

$$\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$$

そのものである。また、2 形式の反自己双対性は、(1.1) に属するどの複素構造についても $(1,1)$ 形式であるという性質で特徴付けられる。この性質は重要である。

一般にリーマン計量に対して、そのワイル共形曲率テンソル W が、リーマン曲率テンソルのうち共形不変な部分として定まる。4 次元以上の多様体では共形平坦性は $W = 0$ と同値である。W を $\mathrm{End}\,\wedge^2$ の元とみなすとき、W は分解 (1.2) から自己双対成分 W^+ と反自己双対成分 W^- に分解する。この分解は共形変換で不変である。**反自己双対共形構造**とは $W^+ = 0$ であるような共形構造のことをいう。

ここでベクトル束の接続の反自己双対性とリーマン計量の反自己双対性の関係について一言注意しておく。向きづけられた 4 次元多様体上のベクトル束の接続であって、曲率形式が反自己双対的であるものを反自己双対接続 (またはインスタントン) という。これをリーマン計量のレビ・チビタ接続に対して形式的に当てはめると、「共形構造として反自己双対的でかつリッチ平坦」（すなわち「共形構造として反自己双対的で Einstein かつスカラー平坦」）という条件が得られる。したがって共形構造の反自己双対性は Levi-Civita 接続の反自己双対性よりもずっと弱い概念である。

[*1] 半共形平坦構造ともいわれる。

定理 1.1 の証明はみかけよりも難しい。まず上で述べたようにベクトル束 $\wedge^+$ は構造群 SO(4) の随伴表現から得られているので、$\wedge^+$ 上には Levi-Civita 接続が定まっている。この接続の自己双対成分がちょうど W^+ とスカラー曲率の和になっている[*2]。よって計量が反自己双対的かつスカラー平坦であるならば、$\wedge^+$ 上の接続は反自己双対的である。ここで $(1,1)$ 成分による反自己双対性の特徴付けと Z 上の概複素構造の定め方から、このとき $\wedge^+$ の曲率形式を Z 上に持ち上げたものは $(1,1)$ 形式になる。特に $(0,2)$ 成分をもたない。よく知られた概複素構造の積分可能性の判定条件等から、これは積分可能性を意味する。ここではスカラー平坦性も仮定していたが、$\wedge^+$ の曲率形式を Z 上に持ち上げたものが $(1,1)$ 形式になることは積分可能性のための十分条件であって必要条件ではない。このあたりの事情は、スピン束を使うのがもっともわかりやすいと思われる。詳しくは [1] や [19] を参照していただきたい。

定理 1.1 より、4 次元多様体上の反自己双対共形構造から 3 次元複素多様体 Z が定まる。Z のことを反自己双対共形構造に付随する**ツイスター空間**という。構成からツイスター空間 Z は次のような性質をもつ：

(i) 射影 $Z \to M$ の任意のファイバーは複素部分多様体（したがって $\mathbb{CP}^1$ と同型) であり、その正則な意味での法バンドルは $\mathscr{O}(1) \oplus \mathscr{O}(1)$ と同型である。射影 $Z \to M$ のファイバーは (**ツイスター直線**) とよばれる。

(ii) 反正則な対合 $\sigma : Z \to Z$ で、射影 $Z \to M$ の各ファイバーを保ち、かつ固定点をもたないものが存在する。これはツイスター空間の**実構造**とよばれる。

(iii) Z の反標準束 K_Z^{-1} をツイスター直線に制限すると次数は 4 である。また Z 上の特別な正則直線束 F で $F^{\otimes 2} \simeq K_Z^{-1}$ を満たすものが存在する。F はツイスター空間上の**基本直線束**とよばれる。

逆に向きづけ可能な 4 次元多様体 M に対して複素多様体 Z とその上の反正則な対合で (i), (ii) を満たすものが与えられると、M 上の反自己双対共形構造が定まり、そのツイスター空間が Z となる。したがってツイスター空間は反自己双対共形構造の幾何学化とみなすことができる。

反自己双対共形構造の変形の局所理論はよく理解されている。コンパクトな多様体の場合、モジュライ空間は有限次元であり、その仮想次元は Atiyah-Singer の指数定理を使って計算できる。これは反自己双対接続の場合のよく知られた結果 (AHS 複体 [1] を使うもの) の多様体版とみなせるが、変形複体は反自己双対接続の場合よりもかなり複雑である。詳しくは伊藤 [12] などを参照していただきたい。

*2 反自己双対成分はトレースレスリッチテンソルであり、これが消えていることが Einstein condition である。

2 ツイスター空間に関する基本的な結果と初期の例

本節では、まずツイスター空間に関する基本的な結果を説明し、次に反自己双対共形構造および付随するツイスター空間の存在および例について、おおよそ時間順に紹介する。

まず次は容易に証明できるが重要な結果である。

命題 2.1 (Hitchin [6]) ツイスター空間 Z がケーラー計量をもったとすると、反標準束 K_Z^{-1} は正である。すなわちその実係数チャーン類はあるケーラー形式で代表される。 □

証明. ω をケーラー形式とすると $-\sigma^*\omega$ もケーラー形式になる。よって $\omega - \sigma^*\omega$ もケーラー形式であり、これは σ^* で (-1) 倍される。一方、反自己双対共形構造が定義されている 4 次元多様体を M とすれば、Leray-Hirsch の定理から、Z の 2 次の実係数コホモロジー群は、射影 $Z \to M$ を使って

$$H^2(Z, \mathbb{R}) = H^2(M, \mathbb{R}) \oplus \langle c_1^{\mathbb{R}}(Z) \rangle$$

と書ける。σ^* はこの分解を保って作用し、$H^2(M, \mathbb{R})$ には 1 倍、$\langle c_1^{\mathbb{R}}(Z) \rangle$ には (-1) 倍で作用する。よって $\omega - \sigma^*\omega$ のケーラー類は $c_1^{\mathbb{R}}(Z)$ の定数倍である。ツイスター直線上積分することによりこの定数は正であることがわかる。 □

これよりもしツイスター空間 Z がコンパクト曲線 C で $K_Z^{-1} \cdot C \leq 0$ を満たすものをもてば、Z はケーラー計量をもたないことがわかる。

Hitchin は同じ論文でより強く、次の定理を示している：

定理 2.2 Z をコンパクトツイスター空間でケーラー計量を持つものとすると、Z は 3 次元複素射影空間 $\mathbb{CP}^3$ か、旗多様体 $\mathbb{F} := \{(x, l) \in \mathbb{CP}^2 \times (\mathbb{CP}^2)^* \,;\, x \in l\}$ である。 □

ここで $\mathbb{CP}^3$ は 4 次元球面上の標準的な計量（これは共形平坦）のツイスター空間であり、旗多様体 $\mathbb{F}$ は複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 上の Fubini-Study 計量（これは複素向きと反対の向きに関して反自己双対的）のツイスター空間になっている。射影代数多様体はもちろんケーラー多様体であるから、この定理はこれら 2 つの例以外に射影代数的なツイスター空間が存在しないことを意味している。一方で、コンパクト多様体上に反自己双対計量を直接構成することも容易ではない。こうした状況で、Y. S. Poon は 1986 年の論文 [17] で次の画期的な結果を示した：

定理 2.3 射影代数多様体と双有理同値ではあるが射影代数多様体ではないコンパクト複素多様体で、反自己双対共形構造のツイスター空間になっている例が存在し、具体的に構成できる。この例で反自己双対共形構造が定義されている 4 次元多様体は 2 つの複素射

影平面（向きはいずれも複素構造から定まるものと逆）の連結和 $2\overline{\mathbb{CP}}^2$ である。 □

ここで 2 つのコンパクト複素多様体が双有理同値であるとは、一方が他方から双有理変換（ブローアップ・ブローダウン）を何回か施して得られるときを言う。3 次元以上では射影代数多様体に双有理同値で射影代数多様体ではない複素多様体が存在し、それらは **Moishezon 多様体**と呼ばれている[*3]。定理 2.3 は Moishezon ツイスター空間が豊富に存在することを示唆している点でも画期的であった。なお Campana [2] により、Moishezon ツイスター空間を持つ 4 次元多様体は S^4 と n 個の複素射影平面 (向きは複素向きとは逆) の連結和 $n\overline{\mathbb{CP}}^2$ のみである。

Poon が構成したツイスター空間は、$\mathbb{CP}^5$ 内の 2 つの非退化 2 次超曲面の交わりで 4 つ通常二重点をもつものから、small resolution と呼ばれる特殊な特異点解消をとることにより得られる。したがって、この $(2,2)$ 完全交叉を Z_1 とおくと、双有理射

$$Z \longrightarrow Z_1\,(\subset \mathbb{CP}^5)$$

が存在する。実際にはこの射は Z 上の完備線形系 $|F|$（F は前節で定義した基本直線束) に付随する有理写像になっている。またこの双有理射の例外集合はそれぞれ非特異有理曲線であり、Z 内での法バンドルが $\mathscr{O}(-1)^{\oplus 2}$ となっている。この有理曲線を C とすると随伴公式から $K_Z^{-1}\cdot C = 0$ になり、したがって命題 2.1 から Z は射影代数的でないことがわかる。なお実際には Poon のツイスター空間は単独のものではなく、実 1 次元の族をなす。また同じ論文の中で、分類定理「$2\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上の反自己双対共形構造でスカラー曲率を正にとれるもののツイスター空間は上の Z である」も証明されている。

Poon の結果から、より一般に、$\overline{\mathbb{CP}}^2$ の任意個の連結和 $n\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上にも反自己双対共形構造が存在することが期待される。これが正しいことは、Floer [4] と Donaldson-Friedman [3] により示された：

定理 2.4　任意の $n \geq 1$ に対して連結和 $n\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上には反自己双対共形構造が存在する。□

Floer の方法は偏微分方程式の解析を使うものであり難解である[*4]。一方、Donaldson-Friedman の方法はツイスター空間を使ったより幾何学的なものであり、Floer の方法よりも見通しがよい。いずれにしても定理 2.4 は純粋な存在定理であり、反自己双対共形構造とツイスター空間に関して具体的な情報はほとんど得られない。このような状況の下、C. LeBrun は 1991 年の論文 [15] で次の定理を示した：

定理 2.5　任意の $n \geq 1$ に対して連結和 $n\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上の反自己双対共形構造の族の例が具体

[*3] Moishezon 多様体がケーラー計量をもてば射影代数的である。
[*4] しかし発展性のある方法であり、現在に至るまで様々な一般化がなされている。

的に構成できる。また、これらの反自己双対共形構造のツイスター空間は Moishezon 多様体であり、それらも具体的に構成できる。 □

LeBrun の構成は、Eguchi-Hanson, Gibbons-Hawking による重力インスタントン（4 次元ハイパーケーラー多様体）の構成の双曲空間版とみなせるものである。特にこれらはすべて S^1 作用を持つ。より一般に、反自己双対計量の 1 次元群作用による商空間には自然に Einstein-Weyl 構造とよばれる共形幾何構造が入ることが知られており、もとの反自己双対計量は、これらの Einstein-Weyl 構造と、商空間上の線形微分方程式の解を用いて記述できることが知られている。重力インスタントンの場合、商として得られる Einstein-Weyl 多様体は 3 次元ユークリッド空間であり、LeBrun による計量の場合は 3 次元双曲空間である。

LeBrun による反自己双対共形構造は S^1 作用をもつものであったが、1995 年の論文 [13] で D. Joyce は 2 次元トーラスの作用を持つものを構成している：

定理 2.6 $n \geq 2$ とする。連結和 $n\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上への 2 次元トーラスの任意の効果的作用に対して、$n\overline{\mathbb{CP}}^2$ の反自己双対共形構造でその作用を自己同型群の単位元成分としてもつものが具体的に構成できる。 □

ここで $n\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上への 2 次元トーラスの効果的作用は、n を止めるごとに有限個であり、組み合わせ的なデータを使って分類されている。藤木は 2000 年の論文 [5] で Joyce 計量のツイスター空間の幾何的な構造を詳しく調べることにより次の分類定理を示した：

定理 2.7 $n\overline{\mathbb{CP}}^2$ の反自己双対共形構造で 2 次元トーラスの効果的作用をもつものは Joyce 計量に限る。 □

この定理の証明で鍵となるのは、ツイスター空間上の線形系 $|F|$ が一部の例外を除いてペンシルになりその一般元が非特異トーリック曲面になることである。このトーリック曲面の反標準曲線（有理曲線の輪）がペンシル $|F|$ の底点集合になっている。このように Joyce 計量のツイスター空間は美しい構造をもっているが、その具体的な構成方法は一般にはまだ知られていない*5。$4\overline{\mathbb{CP}}^2$ のときの構成方法は [7] で与えられており、そこでは複雑ではあるが興味深い双有理変換が現れる。これらの双有理変換は反自己双対共形構造の共形コンパクト化と関係しており、微分幾何的な観点からも何らかの意味を持つものと思われる。

ツイスター空間そのものの研究に関しては、かなり早い段階で連結和 $3\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上での分類結果が Poon [18], Kreussler-Kurke [14] により得られていた：

*5 ただし射影代数的なモデルは [8] で具体的に構成されている。次節を参照。

定理 2.8　連結和 $3\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上の反自己双対共形構造でスカラー曲率が正のもののツイスター空間を Z とすると、$\dim|F|=3$ であり、線形系 $|F|$ に付随する有理写像を $\Phi: Z\to\mathbb{CP}^3$ とすると以下のいずれかが成立する：

(i) $|F|$ が底点集合をもつとき、像 $\Phi(Z)$ は $\mathbb{CP}^3$ 内の非特異 2 次曲面である。

(ii) $|F|$ が底点集合をもたないとき、射 $\Phi: Z\to\mathbb{CP}^3$ は全射で写像としての次数は 2 である。また Φ は因子をつぶさず、分岐因子は 4 次曲面である。 □

この結果で (i) を満たすツイスター空間は、LeBrun ツイスター空間 (定理 2.5) の $n=3$ の場合に他ならない。(i) のツイスター空間は (ii) のツイスター空間の極限 (特殊化) として得られ、(i) よりも (ii) のほうが generic なツイスター空間である。ただし (ii) の分岐曲面は特殊な特異 4 次曲面になることが知られており、実際には研究の主要部はその 4 次曲面を特定することにある。これについても [18, 14] でおおよその理解が得られている。

以上が 2000 年頃までの研究の状況である。

3　その後の発展

前節で紹介した結果から、$n\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上の反自己双対共形構造のツイスター空間に関しては $n=2,3$ のときはほぼ完全な理解が得られている。これらの場合に早くから分類結果が得られていたのは、次の事情による：一般に $n\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上のツイスター空間について、基本直線束 F に対するリーマンロッホの公式は

$$\chi(F)=10-2n \tag{3.1}$$

で与えられる。また Hitchin の消滅定理等から、$H^i(F)$ は $i>0$ のとき 0 であることが示せる。（ただし $H^1(F)=0$ となるのは $n\in\{2,3\}$ のときの特殊事情であり、消滅定理からは出ない。）以上から $n=2$ のとき $\dim|F|=5$, $n=3$ のとき $\dim|F|=3$ が得られる。これからツイスター空間 Z の構造を線形系 $|F|$ によって十分に理解することができた。特に $2\overline{\mathbb{CP}}^2$, $3\overline{\mathbb{CP}}^2$ のツイスター空間はスカラー曲率が正の反自己双対共形構造を考えている限り[*6]は Moishezon 多様体である。

$n=4$ のときは、リーマンロッホの公式 (3.1) は $\chi(F)=2$ となり、generic なツイスター空間に対しては $\dim|F|=1$ となる。さらに比較的簡単な議論で一般にツイスター空間は Moishezon 多様体でないことがわかる。Moishezon でないツイスター空間も興味深い対象なのであるが、以下では話を発散させないため、Moishezon 多様体に話題を絞

*6　これらの空間上でスカラー曲率が負にとれる反自己双対共形構造は知られていない。

ることにする。Moishezon 多様体に限ったとしても、$4\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上の generic なツイスター空間は $\dim|F| = 1$ となるので、$|F|$ そのものを使っていては構造が十分には理解できない。そこで次に考えられるのは $|2F|$ を使うことである。ここで $2F = K_Z^{-1}$(反標準束) に注意する。すると以下の分類定理が成り立つ [9]：

定理 3.1　Z を $4\mathbb{CP}^2$ 上の Moishezon ツイスター空間とし、Φ をその反標準写像とすると、以下のいずれかが成立する：

(i)　反標準写像 Φ は像の上に双有理。このとき反標準系は 6 次元または 8 次元であり、6 次元のとき像 $\Phi(Z)$ は $(2,2,2)$ 完全交叉、8 次元のとき非完全交叉。*7

(ii)　反標準写像 Φ は像の上に 2 対 1。このとき反標準系は 4 次元であり、像 $\Phi(Z)$ は線形射影 $p : \mathbb{CP}^4 \to \mathbb{CP}^2$ と 2 次曲線 C を用いて $p^{-1}(C)$ と書ける。また $Z \to p^{-1}(C)$ の分岐因子は 4 次超曲面によるカット。

(iii)　像 $\Phi(Z)$ は 2 次元。このとき反標準系の次元は $8, 5, 4$ のいずれか。8 次元のとき像 $\Phi(Z)$ は Veronese 埋め込み $\mathbb{CP}^3 \subset \mathbb{CP}^9$ による非特異 2 次曲面の像。5 次元のとき、像 $\Phi(Z)$ は Veronese 曲面、すなわち $\mathbb{CP}^2$ の $|\mathscr{O}(2)|$ による埋め込みの像。4 次元のとき像 $\Phi(Z)$ は $(2,2)$ 完全交叉。*8　□

各場合について Z の存在が示されており、モジュライ空間の次元も計算されている。

定理 3.1 の証明ではまず反標準系 $|2F|$ の次元を計算をする必要があるが、これは $n = 4$ のときの特殊事情で容易である*9。(i) において像 $\Phi(Z)$ の定義式を決める際には線形系 $|F|$ の可約元たちが主要な役割を果たす。(ii) のツイスター空間は、単独の 4 次多項式で記述できるという点で、定理 2.8 における $3\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上のツイスター空間のうち、(ii) に属するものに相当するものとみなすことができる。これについても、主要な問題は 4 次超曲面の定義式の形の決定にあり、これには反標準系の底点集合の消去を必要とする。Joyce 計量のツイスター空間の場合と同様、底点集合の消去は反自己双対共形構造の共形コンパクト化に関係しており、何らかの微分幾何的な解釈ができることが予想される。

$n > 4$ のときはリーマンロッホの公式 (3.1) から $\chi(F) \le 0$ となるので、たとえツイスター空間が Moishezon であることを仮定したとしても、$|F| \neq \emptyset$ かどうかはわからない。普通に考えると $|F| = \emptyset$ なる Moishezon ツイスター空間が存在するように思われるが、現在のところ、そのような Moishezon ツイスター空間の例は知られていないと思わ

*7 Joyce 計量のツイスター空間で LeBrun でないものはこのクラスに属する。

*8 反標準系が 4 次元になる場合以外は、$|2F|$ が $|F|$ で合成されている。8 次元になる場合は、LeBrun のツイスター空間 (定理 2.5) の $n = 4$ の場合である。

*9 ただし、$|F|$ の元の非特異性に関する Pedersen-Poon [16] の有用な結果を用いる。

れる[*10]。一方 $\dim|F|=1$ なる Moishezon ツイスター空間は非常に数多く知られている。おおざっぱに言って、それらの構造の解析方法は $\mathbb{C}^*$ 作用を持つ場合とそうでない場合に分かれる。

$\dim|F|=1$ で $\mathbb{C}^*$ 作用を持つ Moishezon ツイスター空間に対しては、次を満たす自然数 m を、ペンシル $|F|$ の一般元の構造から具体的に計算することができる：「完備線形系 $|mF|$ の $\mathbb{C}^*$ 不変部分 $|mF|^{\mathbb{C}^*}$ は $|F|$ で合成されておらず、付随する有理写像の像は 2 次元。」像はツイスター空間の $\mathbb{C}^*$ 作用による商空間とみなすことができる。射影空間内での具体的な定義式を与えることも可能である。この複素曲面はミニツイスター空間と呼ばれるものであり、実 3 次元多様体上の Einstein-Weyl 構造を幾何学的に実現した表現とみなすことができる。（ミニツイスター空間と Einstein-Weyl 構造の関係については中田文憲氏との共著論文 [11] を参照していただきたい。）もとのツイスター空間たちは、これらのミニツイスター空間の上の $\mathbb{C}^*$ 束のコンパクト化として得られる。LeBrun 計量のツイスター空間（定理 2.5) はこの構成の非常に特殊な場合と見なすことができる。また Joyce 計量 (定理 2.6) に対しても、2 次元トーラスに対して適切な S^1 部分群を選ぶことにより、そのツイスター空間を上記のミニツイスター空間上の $\mathbb{C}^*$ 束のコンパクト化として実現することができる。これらの結果については論文 [8] を参照して頂きたい。なお LeBrun の場合とは違って、[8] で構成された Moishezon ツイスター空間に対応する反自己双対共形構造のわかりやすい記述は得られていない。これは有望な問題と思われる。

ツイスター空間が $\mathbb{C}^*$ 作用を持たない場合はたとえ $\dim|F|=1$ であっても [8] で使われた解析方法はまったく機能しない。しかしながら、定理 3.1 の (ii) のツイスター空間の一般化とみなせるような Moishzon ツイスター空間の系列が見つかっている。すなわち次が知られている [10]：

定理 3.2　任意の $n\geq 4$ に対して $n\overline{\mathbb{CP}}^2$ 上のツイスター空間で以下の性質を満たすものが存在する：

(i) $\dim|F|=1$,

(ii) $m<n-2$ のとき $|mF|$ は $|F|$ で合成されている,

(iii) $m=n-2$ のとき、$|mF|$ は $|F|$ で合成されておらず、$\dim|(n-2)F|=n$.

(iv) 線形系 $|(n-2)F|$ に付随する有理写像を $\Phi: Z\to\mathbb{CP}^n$ とすると、Φ は像の上に 2 対 1。像 $\Phi(Z)$ は、線形射影 $p:\mathbb{CP}^n\to\mathbb{CP}^{n-2}$ と $\mathbb{CP}^1$ の $|\mathscr{O}(n-2)|$ による埋め込みの像 $C\subset\mathbb{CP}^{n-2}$ を用いて $p^{-1}(C)$ と書ける。またこのとき分岐因子は 4 次

[*10] これの原因は、少々間が抜けているが、$|F|=\emptyset$ を満たすツイスター空間に対しては代数次元を計算する手段が見つかっていないことである。また、$|F|$ がただ一つの元からなるような Moishezon ツイスター空間の例も見つかっていないと思われる。

超曲面によるカット。 □

定理 3.2 の証明は、まず非特異有理曲面 S を具体的に与え、それを線形系 $|F|$ の元としてもつツイスター空間がこれらの性質を満たすことを示すことによってなされる[*11]。証明の第一の山場は (iii) を示すことである。これを示すためには、$F|_S \simeq K_S^{-1}$ であることに注意して、まず $|(n-2)K_S^{-1}|$ が $\mathbb{CP}^2$ への 2 対 1 写像を引き起こすことを示す必要があるが、これは S の構造を指定しているので易しい[*12]。(iii) を示すためには $|(n-2)K_S^{-1}|$ の元が Z 全体に延びていること、すなわち制限写像 $H^0((n-2)F) \to H^0((n-2)K_S^{-1})$ が全射であることを示す必要があるが、これはコホモロジー完全列や消滅定理を使った形式的な計算からは得られず、大量の交点数の計算が必要である。ただ、基本的な考え方は、「底点集合でブローアップして例外集合を取り除けば高次のコホモロジー群は消えやすくなる」という一般的な原理 (?) に乗っている。またここでは割愛したが、$n \in \{3,4\}$ のときと同様、研究のかなりの部分は 4 次超曲面の定義式を決定することに費やされ、それがもっとも困難な箇所である。

定理 3.2 のツイスター空間は $3\overline{\mathbb{CP}}^2$ の場合の定理 2.8 (ii) のツイスター空間、$4\overline{\mathbb{CP}}^2$ の場合の定理 3.1 (ii) のツイスター空間の自然な一般化に見えるが、実際には定理 3.2 のツイスター空間を特殊化（極限）としてもつツイスター空間の族が存在することが予想される。

以上の結果とそれらの証明方法から、Moishezon ツイスター空間の研究の主要な課題は $\dim |F| < 1$ を満たすものの存在・非存在に移ったと考えられる。

参考文献

[1] M. Atiyah, N. Hitchin, I. Singer, *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **362** (1978) 425–461.

[2] F. Campana, *On twistor spaces of the class $\mathscr{C}$*, J. Differential Geom. **33** (1991) 541–549.

[3] S. K. Donaldson, R. Friedman, *Connected sums of self-dual manifolds and deformations of singular spaces*, Non-linearlity **2** (1989) 197–239.

[4] A. Floer, *Self-dual conformal structures on $l\mathbb{CP}^2$*, J. Differential Geom. **33** no. 2 (1991) 551-573.

[5] A. Fujiki. *Compact self-dual manifolds with torus actions*, J. Differential Geom. **55** (2000) 229–324.

*11 よってこれらのツイスター空間は $|F|$ の非特異元の構造によって特徴付けることができる。

*12 むしろこうなるように S を与えている、というのが実際のところである。

[6] N. Hitchin, *Kählerian twistor spaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **43** (1981) 133-150.

[7] N. Honda, *On a construction of the twistor spaces of Joyce metrics*, J. Algebraic Geom. **17** (2008) 709-750.

[8] N. Honda, *A new series of compact minitwistor spaces and Moishezon twistor spaces over them*, J. reine angew. Math. **642** (2010) 197-235.

[9] N. Honda, *Moishezon twistor spaces on* $4\mathbb{CP}^2$, J. Algebraic Geom. **23** (2014) no.3, 471-538.

[10] N. Honda, *Double solid twistor spaces II: general case*, J. reine angew. Math. **698** (2015) 181-220.

[11] N. Honda, F. Nakata, *Minitwistor spaces, Severi varieties, and Einstein-Weyl structure*, Ann. Global Anal. Geom. **39** (2011) no.3. 293–323.

[12] M. Itoh, *Moduli of half conformally flat structures*, Math. Ann. **296** (1993) no. 4, 687 – 708.

[13] D. Joyce, *Explicit construction of self-dual 4-manifolds*, Duke Math. J. **77** (1995) 519-552.

[14] B. Kreussler and H. Kurke, *Twistor spaces over the connected sum of 3 projective planes.* Compositio Math. **82**:25–55, 1992.

[15] C. LeBrun, *Explicit self-dual metrics on* $\mathbf{CP}^2\#\cdots\#\mathbf{CP}^2$, J. Differential Geom. **34** (1991) 223–253.

[16] H. Pedersen, Y. S. Poon, *Self-duality and differentiable structures on the connected sum of complex projective planes*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994) 859-864.

[17] Y. S. Poon, *Compact self-dual manifolds of positive scalar curvature*, J. Differential Geom. **24** (1986) 97–132.

[18] Y. S. Poon, *On the algebraic structure of twistor spaces*, J. Differential Geom. **36** (1992) 451–491.

[19] S. Salamon, "Topics in 4-dimensional Riemannian Geometry" Springer LNM **1022** (1983) 33–124.